

Contrôle thermique

Exemple 1 :

A_1 convexe contenue dans A_2 .

$$F_{12} = F_{21} = 1$$

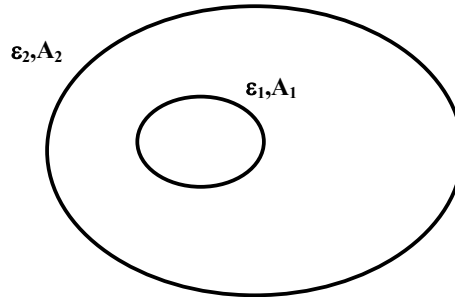
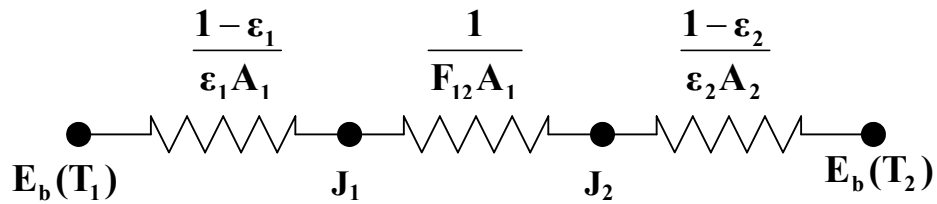


Schéma électrique équivalent :



$$q = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{F_{12} A_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{A_1 \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1 + \frac{(1-\varepsilon_2) \varepsilon_1 A_1}{\varepsilon_2 A_2}}$$

Approximation : Si $A_2 \gg A_1$

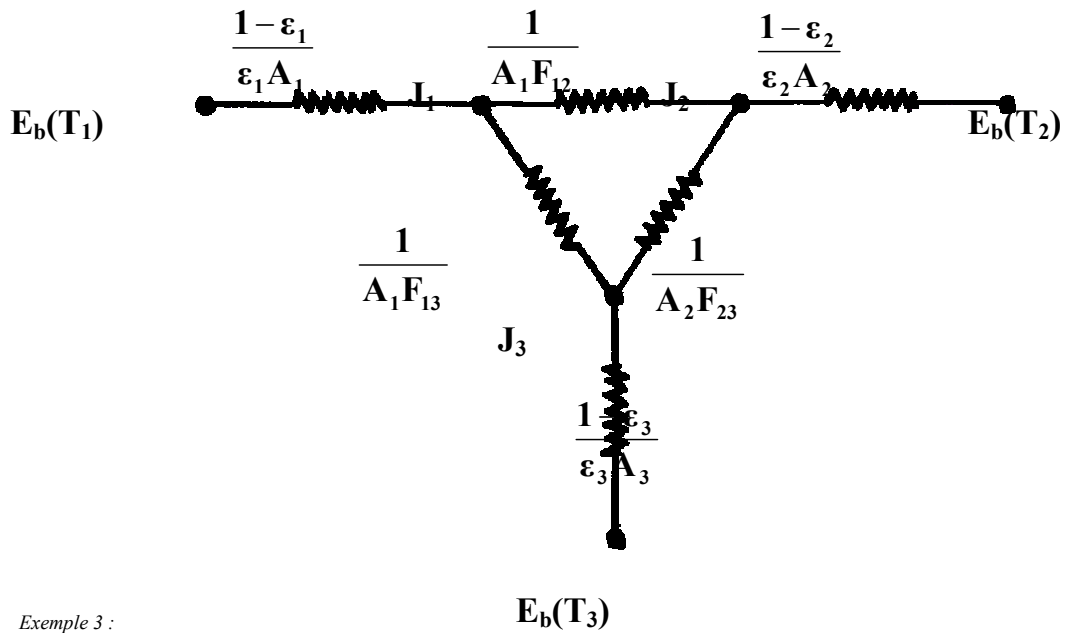
$$q = A_1 \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

N.B. Il s'agit d'une formule qu'on retrouve souvent utilisée erronément dans les livres. Elle n'est valable que si $\varepsilon_2=1$ (corps noir) ou $A_2 \gg A_1$ (surface très grande).

Contrôle thermique

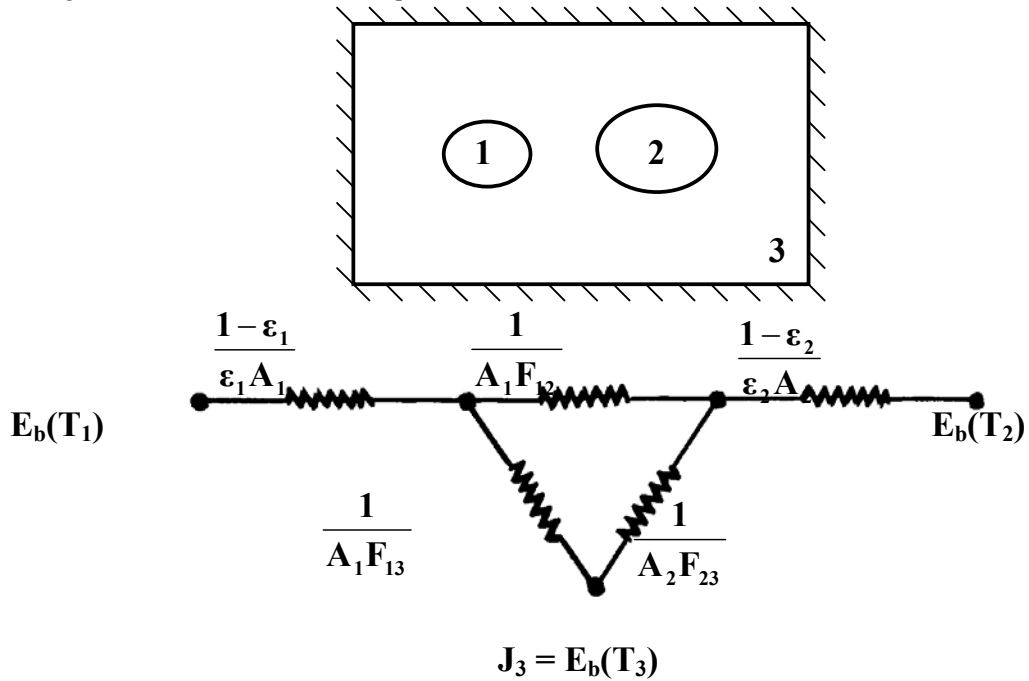
Exemple 2 :

Trois surfaces se voyant mutuellement et ne voyant rien d'autre.



Exemple 3 :

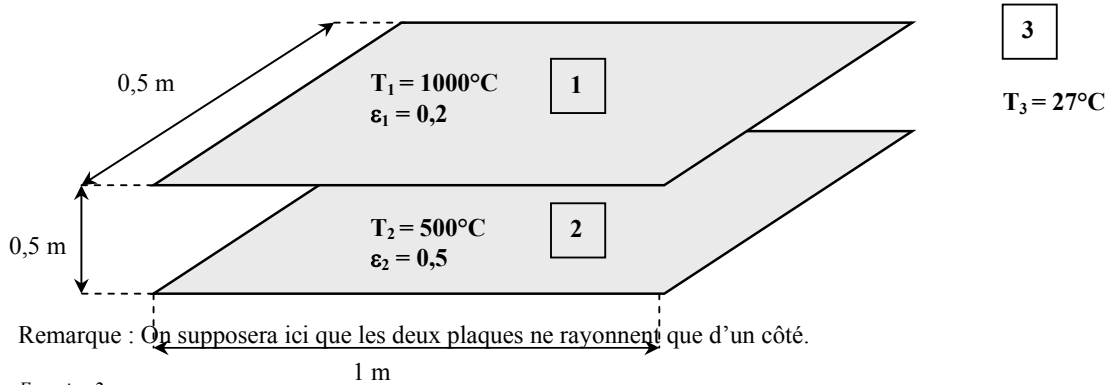
Echange entre deux surfaces entourées par une troisième surface isolée vis à vis de l'extérieur.



Contrôle thermique

Exercice 1 :

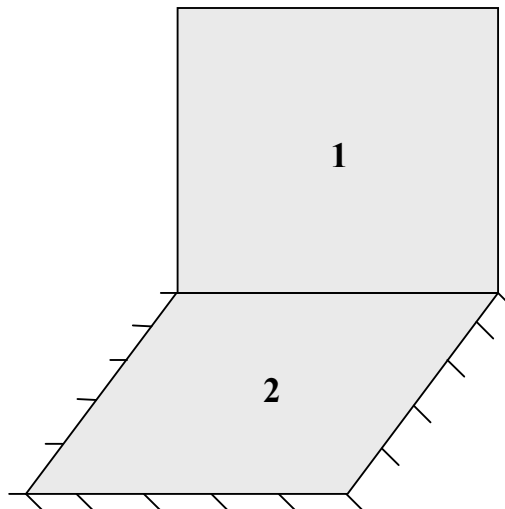
Déterminer tous les échanges thermiques entre deux plaques dans une pièce à 27°C (la pièce est supposée très grande : $A \gg \lambda$).



Exercice 2 :

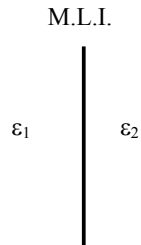
Deux rectangles sont placés perpendiculairement, avec une arête commune. La première surface est maintenue à 1000K ($\epsilon_1=0,6$), l'autre surface à sa face arrière isolée et rayonne vers la surface 1. Le tout est plongé dans un environnement très grand à 300K. Déterminer la température de la surface 2 isolée, ainsi que le flux de chaleur à fournir au système de l'extérieur pour maintenir la température à 1000K.

Remarques : - La surface 2 étant isolée thermiquement, T_2 est la température de puits de cette surface.
- On ne donne pas ϵ_2 car on n'a pas besoin de l'émissivité d'une surface pour déterminer sa température de puits.

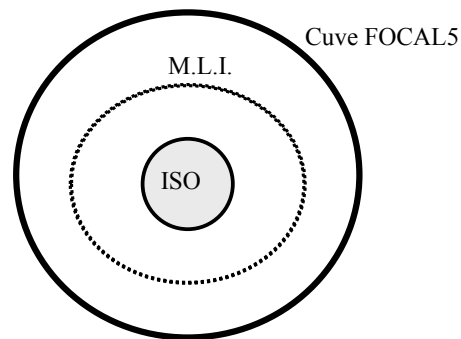


Exercice 3 :

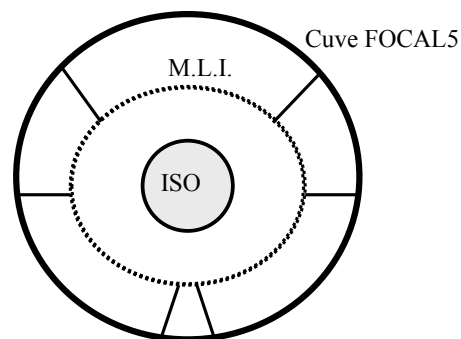
Pour isoler le télescope ISO à l'intérieur de FOCAL5, on l'entoure de M.L.I. caractérisé par des émissivités différentes selon le côté par lequel on le regarde.



- Comment faut-il orienter le M.L.I. si $\epsilon_1 > \epsilon_2$ et si on veut isoler l'expérience de la cuve le mieux possible ?



- Même question, mais on tient compte du fait qu'on maintient le M.L.I. par un support dont la conductivité n'est plus négligeable.



Contrôle thermique

Annexe 1 : Transfert thermique dans un gaz visqueux

Gaz à 20 °C	M (Kg/mole)	Vm (m/s)	Vq (m/sec)	V son (m/s)	Em (J/mole)
H2	2.016E-03	1754	1904	1315	
He	4.003E-03	1245	1351	933	
H2O	1.8016E-02	587	637	416	3654
N2	2.802E-02	470	510	394	
O2	3.200E-02	440	478	328	
CO2	4.401E-02	375	407	267	

La conductivité de l'air est indépendante de la pression.

$$\eta = 0.499 \cdot m \cdot N_1 \cdot v_m \cdot l_m = 0.499 \cdot \rho \cdot v_m \cdot l_m = \frac{0.499 \cdot m \cdot v_m}{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma^2}$$

$$\eta = \frac{0.499}{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma^2} \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi}} \cdot \sqrt{m}$$

Chapman

T (K) / K	A	Air	CO2	N2	O2	F2	Cl2	NH3
100	157	219		223	214	206		
150	230	329		329	328	321		
200	298	438	227	437	438	436	128	
250	364	532	305	528	537	544	170	
273	392	575	341	571	583	592	188	516
300	423	619	387	616	633	643	211	587
350	480	697	476	692	716	736	254	727
400	532	772	565	766	795	823	296	868
450	582	841	651	834	868	909	338	1031
500	629	904	737	895	938	993	378	1192
550	672	968	825	957	1011	1078	415	1354
600	713	1028	912	1014	1085	1166	450	1490
650	752	1091		1074	1159	1251	484	
700	791	1152		1132	1230	1336	515	
750	828			1193	1304	1418		
800	864			1252	1378	1503		

K en cal/m/s/K

La limite supérieure du régime visqueux est définie par le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{U_m \cdot d}{\nu} < 1200$$

$$k = \frac{N_1 \cdot U_m \cdot l_m}{3} \cdot c_v = \eta \cdot c_v$$

Chapman Enskog

$$k = B \cdot \eta \cdot c_v$$

B = 2.5 pour gaz monoatomique
 1.9 diatomique
 1.75 triatomique

Transfert thermique dans un gaz à l'état raréfié

Phénomène de Condensation - Evaporation aux parois

$$l_{\text{moyen}} = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma^2 \cdot N_1} = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma^2} \cdot \frac{kT}{P}$$

La molécule est assimilée à une sphère de diamètre σ .

$$l_{\text{moyen}} \text{ (m)} = \frac{2.10^{-5} T(\text{K})}{P(\text{Pa})}; \quad l_{\text{moyen}} \text{ (m)} = \frac{\lambda T(\text{K})}{P(\text{Pa}) \cdot 293}$$

Tenant compte des forces de Van Der Waals, Sutherland écrit :

$$l_m = \frac{\frac{kT}{P}}{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma^2 \cdot (1 + \frac{B}{T})} = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma^2 \cdot N_1 \cdot (1 + \frac{B}{T})}$$

Gaz à 20 °C	M (Kg/mole)	Vm (m/s)	Vq (m/s)	V son (m/s)	λ m.Pa	σ (Å)	η	Pl à 15°C		
								lm	m à 15°C	s à 15°C
							1Bar	1Bar	1Bar	
Air		459	498	344	6.70E-03	3.75	1.7960E-05	6.40E-08		
H2	2.016E-03	1754	1904	1315	1.22E-02	2.74	8.710E-06	1.177E-07	9.700E-11	
He	4.003E-03	1245	1351	933	1.92E-02	2.18	1.943E-05	1.862E-07	2.060E-10	
H2O	1.8016E-02	587	637	416						
N2	2.802E-02	470	510	394	6.41E-03	3.77	1.734E-05	6.280E-08	1.850E-10	
O2	3.200E-02	440	478	328	7.10E-03	3.75	2.003E-05	6.790E-08	1.560E-10	
CO2	4.401E-02	375	407	267	4.40E-03	4.59	1.448E-05	4.190E-08	7.200E-11	
CO		467	506	332	6.50E-03	3.61				
Ar		391	425	279	6.90E-03	3.66				
Hg (220°C)	0.2	176	191	125	3.50E-03	5.1	4.700E-05	8.320E-08		

Temps de collage à la parois

$$\tau_s = \frac{4 \cdot \sqrt{\pi \cdot M}}{\sigma^2 \cdot N_1 \cdot \sqrt{8 \cdot R \cdot T}} = \frac{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot M}}{\sigma^2 \cdot \frac{P}{kT} \cdot \sqrt{R \cdot T}}$$

X nombre de collisions par sec avec les parois de surface S: $X = \frac{1}{4} \cdot N_1 \cdot V_m \cdot S = \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{kT} \cdot V_m \cdot S$

Y nombre de collisions par sec entre molécules dans un volume V: $Y = N_1^2 \cdot V \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma^2 \cdot \pi \cdot V_m$

Nombre de Knudsen Y/X (= d/l_m pour un long cylindre) joue le rôle du nombre de Reynolds pour la limite inférieure du régime visqueux.

$$\frac{Y}{X} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot N_1 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{V}{S} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \frac{P}{kT} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{V}{S}$$

Pour l'air et un cylindre de diamètre d très long: $\frac{Y}{X} = 6.2 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{P}{kT} \cdot d$

Contrôle thermique

Focal 5	Air à 20°C						
Pression (Pa)	100000	1000	10	1.00E-01	1.00E-03	1.00E-05	1.00E-07
Pression (mBar)	1.00E+03	1.00E+01	1.00E-01	1.00E-03	1.00E-05	1.00E-07	1.00E-09
lm (m)	6.70E-08	6.70E-06	6.70E-04	6.70E-02	6.70E+00	6.70E+02	6.70E+04
N1 (molcle/m ³)	2.48E+25	2.48E+23	2.48E+21	2.48E+19	2.48E+17	2.48E+15	2.48E+13
Y/X = d0/lm	7.46E+07	7.46E+05	7.46E+03	7.46E+01	7.46E-01	7.46E-03	7.46E-05
τs (sec)	2.40E-09	2.4E-07	0.000024	0.0024	0.24	24	2400

Nbre de molécules par m en volume	4.8695E+26	4.87E+24	4.869E+22	4.869E+20	4.8695E+18	4.87E+16	4.8695E+14	N1*p
Nbre de molécules par m en surface	1.117E+20	1.12E+20	1.117E+20	1.117E+20	1.117E+20	1.12E+20	1.117E+20	1/sig
lm	6.7E-08	6.7E-06	0.00067	0.067	6.7	670	67000	

Coefficient d'acomodation a

T_p température paroi

T_i température gaz incident correspondant à v_m

T_r température gaz réémis par la paroi, correspondant à $V_{m,r}$

$$a = \frac{T_r - T_i}{T_p - T_i}$$

$T_0 = T_{\text{paroi froide}}$

$$k_{\text{thermique}} = a \cdot \Lambda \cdot P$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2 \cdot R}{\pi \cdot M \cdot T_0}}$$

$$\Lambda_{\text{expérimental}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot \sqrt{\frac{R}{2 \cdot \pi \cdot M \cdot T_0}}$$

a_1 parois froide; a_2 parois chaude : $a = a_1 \cdot a_2 / (a_1 + a_2 + a_1 \cdot a_2)$

Gaz	M	γ	λ (W/m/K)	Λ (W/m ² /K/Pa)
H2	2.016	1.41	0.171	6.072
He	4.003	1.67	0.1436	2.935
H2O	18.016	1.3		2.649
Ne	20.18	1.67	0.0466	1.307
N2	28.02	1.4	0.0238	1.663
O2	32	1.4	0.0244	1.557
A	39.94	1.67	0.016	0.929
CO2	44.01	1.3	0.0144	1.696
Hg	220.6	1.67		0.415

Contrôle thermique

Formule pratique $W(\text{Watts}) = K.S.a.P(\text{Pa}).(T_1 - T_0)$

Gaz	T2 et T1 (K)	K	T = 300K	T = 77K	T = 20K
N2	<400	1.2			
O2	<300	1.12			
H2	300 et 77	4	0.3	0.5	1
H2	77 et 20	3			
He	indifférent	2.2	0.3	0.6	0.6
Air			0.8	1	1

	P (mBar)	P (Pa)	Raréfié	Visqueux
1 m ²	1.00E-02	1	0.24	W/m/K
2 surface à 5 m	1.00E-03	1.00E-01	0.024	0.0238
	1.00E-04	0.01	0.0024	0.0238
	1.00E-05	0.001	0.00024	0.0238
	1.00E-06	0.0001	0.000024	0.0238
	1.00E-07	0.00001	2.4E-06	0.0238
	1.00E-08	0.000001	2.4E-07	0.0238
	1.00E-09	1E-07	2.4E-08	0.0238
	1.00E-10	1E-08	2.4E-09	0.0238

Annexe 2 THERMAL FINISHES

a= solar absorbtivity

e= normal emmittance

ESH=equivalent Sun Hours

Coating thickness is usually critical

NAME	SOLAR	NORMAL	Ratio
BLACK COATINGS	a	e	a/e
Anodize Black	0.88	0.88	1.00
Carbon Black Paint NS-7	0.96	0.88	1.09
Catalac Black Paint	0.96	0.88	1.09
Chemglaze Black Paint Z306	0.96	0.91	1.05
Delrin Black Plastic	0.96	0.87	1.10
Ebanol C Black	0.97	0.73	1.33
Ebanol C Black-384 ESH* UV	0.97	0.75	1.29
GSFC Black Silicate MS-94	0.96	0.89	1.08
GSFC Black Paint 313-1	0.96	0.86	1.12
Hughson Black Paint H322	0.96	0.86	1.12
Hughson Black Paint L-300	0.95	0.84	1.13
Martin Black Paint N-150-1	0.94	0.94	1.00
Martin Black Velvet Paint	0.91	0.94	0.97
3M Black Velvet Paint	0.97	0.91	1.07
Paladin Black Lacquer	0.95	0.75	1.27
Parsons Black Paint	0.98	0.91	1.08
Polyethylene Black Plastic	0.93	0.92	1.01
Pyramil Black on Beryllium Copper	0.92	0.72	1.28
Tedlar Black Plastic	0.94	0.90	1.04
Velesat Black Plastic	0.96	0.85	1.13

Contrôle thermique

WHITE COATINGS	a	e	a/e
Barium Sulphate with Polyvinyl Alcohol	0.06	0.88	0.07
Biphenyl-White Solid	0.23	0.86	0.27
Catalac White Paint	0.24	0.90	0.27
Dupont Lucite Acrylic Lacquer	0.35	0.90	0.39
Dow Corning White Paint DC-007	0.19	0.88	0.22
GSFC White Paint NS43-C	0.20	0.92	0.22
GSFC White Paint NS44-B	0.34	0.91	0.37
GSFC White Paint NS-74	0.17	0.92	0.18
GSFC White Paint NS-37	0.36	0.91	0.40
Hughson White Paint A-276	0.26	0.88	0.30
Hughson White Paint A-276+1036 ESH UV	0.44	0.88	0.50
Hughson White Paint V-200	0.26	0.89	0.29
Hughson White Paint Z-202	0.25	0.87	0.29
Hughson White Paint Z-202+1000 ESH UV	0.40	0.87	0.46
Hughson White Paint Z-255	0.25	0.89	0.28
Mautz White House Paint	0.30	0.90	0.33
3M-401 White Paint	0.25	0.91	0.27
Magnesium Oxide White Paint	0.09	0.90	0.10
Magnesium Oxide Aluminium Oxide Paint	0.09	0.92	0.10
Opal Glass	0.28	0.87	0.32
OSO-H White Paint 63W	0.27	0.83	0.33
P764-1A White Paint	0.23	0.92	0.25
Potassium Fluorotitanate White Paint	0.15	0.88	0.17
Sherwin Williams White Paint (A8W11)	0.28	0.87	0.32
Sherwin Williams White Paint (F8WJ2030)	0.39	0.82	0.48
Sherwin Williams F8W2030 w Polasol V6V241	0.36	0.87	0.41
Sperex White Paint	0.34	0.85	0.40
Tedlar White Plastic	0.39	0.87	0.45
Titanium Oxide White Paint with Methyl Silicone	0.20	0.90	0.22
Titanium Oxide White Paint with Potassium Silicate	0.17	0.92	0.18
Zerlouts S-13G White Paint	0.20	0.90	0.22
Zerlouts Z-93 White Paint	0.17	0.92	0.18
Zinc Orthotitanate with Potassium Silicate	0.13	0.92	0.14
Zinc Oxide with Sodium Silicate	0.15	0.92	0.16
Zirconium Oxide with 650 Glass Resin	0.23	0.88	0.26

Contrôle thermique

CONDUCTIVE PAINT	a	e	a/e
Brilliant Aluminum Paint	0.30	0.31	0.97
Epoxy Aluminum Paint	0.77	0.81	0.95
Finch Aluminum Paint 643-1-1	0.22	0.23	0.96
Leafing Aluminum in Epon 828	0.37	0.36	1.03
Leafing Aluminum (80-U)	0.29	0.32	0.91
NRL Leafing Aluminum Paint	0.24	0.24	1.00
NRL Leafing Aluminum Paint	0.28	0.29	0.97
Silicone Aluminum Paint	0.29	0.30	0.97
Dupont Silver Paint 4817	0.43	0.49	0.88
Chromeric Silver Paint 586	0.30	0.30	1.00
GSFC Yellow NS-43-G	0.38	0.90	0.42
GSFC Green NS-53-B	0.52	0.87	0.60
GSFC Green NS-43-E	0.57	0.89	0.64
GSFC White NS-43-C	0.20	0.92	0.22
GSFC Green NS-55-F	0.57	0.91	0.63
GSFC Green NS-79	0.57	0.91	0.63

ANODIZED ALUMINUM SAMPLES	a	e	a/e
Black	0.65	0.82	0.79
Black	0.86	0.86	1.00
Blue	0.67	0.87	0.77
Blue	0.53	0.82	0.65
Brown	0.73	0.86	0.85
Chromic	0.44	0.56	0.79
Clear	0.27	0.76	0.36
Clear	0.35	0.84	0.42
Green	0.66	0.88	0.75
Gold	0.48	0.82	0.59
Plain	0.26	0.04	6.50
Red	0.57	0.88	0.65
Sulphuric	0.42	0.87	0.48
Yellow	0.47	0.87	0.54
Blue Anodized Titaniuml Foil	0.70	0.13	5.38

METALS AND CONVERSION COATINGS	a	e	a/e
Alzac A-2	0.16	0.73	0.22
Alzac A-5	0.18	-	
Black Chrome	0.96	0.62	1.55
Black Copper	0.98	0.63	1.56
Black Irridite	0.62	0.17	3.65
Black Nickel	0.91	0.66	1.38
Buffed Aluminum	0.16	0.03	5.33
Buffed Copper	0.30	0.03	10.00
Constantan-Metal Strip	0.37	0.09	4.11
Copper Foil Tape			
Plain	0.32	0.02	16.00
Sanded	0.26	0.04	6.50
Tarnished	0.55	0.04	13.75
Dow 7 on Polished Magnesium	0.49	-	
Dow 7 on Sanded Magnesium	0.65	-	
Dow 9 on Magnesium	0.87	-	
Dow 23 on Magnesium	0.62	0.67	0.93
Ebanol C Black	0.97	0.77	1.26
Electroplated Gold	0.23	0.03	7.67
Electroless Nickel	0.39	0.07	5.57
Irridite Aluminum	-	0.11	
Inconel X Foil (1 mil)	0.52	0.10	5.20
Kannigen-Nickel Alloy	0.45	0.08	5.63
Plain Beryllium Copper	0.31	0.03	10.33
Platinum Foil	0.33	0.04	8.25
Stainless Steel			
Polished	0.42	0.11	3.82
Machined	0.47	0.14	3.36
Sandblasted	0.58	0.38	1.53
Machine Rolled	0.39	0.11	3.55
Boom-Polished	0.44	0.10	4.40
1-mil 304 Foil	0.40	0.05	8.00
Tantalum Foil	0.40	0.05	8.00
Tungsten Polished	0.44	0.03	14.67
VAPOR DEPOSITED COATINGS	a	e	a/e
Aluminum	0.08	0.02	4.00
Aluminum on Fiberglass	0.15	0.07	2.14
Aluminum on Stainless Steel	0.08	0.02	4.00
Chromium	0.56	0.17	3.29
Chromiumlon 5-mil Kapton	0.57	0.24	2.38
Germanium	0.52	0.09	5.78
Gold	0.19	0.02	9.50
Iron Oxide	0.85	0.56	1.52
Molybdenum	0.56	0.21	2.67
Nickel	0.38	0.04	9.50
Rhodium	0.18	0.03	6.00
Sliver	0.04	0.02	2.00
Titanium	0.52	0.12	4.33
Tungsten	0.60	0.27	2.22

Contrôle thermique

Spacecraft Solar Arrays	a	e	a/e
AE	0.78	0.82	0.95
AMSAT	0.82	0.85	0.96
ATN Black	0.77	0.80	0.96
ATN Blue	0.86	0.85	1.01
ATSF	0.85	0.85	1.00
COMSAT	0.82	0.85	0.96
DE	0.77	0.81	0.95
ETS/GOES	0.82	0.80	1.02
GOES	0.91	0.81	1.12
GPS-Conductive Coating	0.81	0.80	1.01
HELIOS	0.80	0.82	0.98
IME-Conductive Coating	0.75	0.79	0.95
IMP-H	0.78	0.82	0.95
IMP-I	0.78	0.81	0.96
ISEE-Conductive Coating	0.91	0.79	1.15
IUE	0.86	0.84	1.02
OAD	0.85	0.81	1.05
PAC	0.77	0.81	0.95
SMS-B	0.81	0.80	1.01
Spanish INTASAT	0.86	0.86	1.00
SSS	0.79	0.82	0.96

Contrôle thermique

MISC	a	e	a/e

Aluminum Oxide (Al ₂ O ₃)-(12/4) on Buffed Alum			
Initial	0.13	0.23	0.57
2560 ESH UV + P+	0.13	0.23	0.57
Aluminum Oxide(Al ₂ O ₃)(12/4) on Fused Silica	0.12	0.24	0.50
Silver Beryllium Copper (AgBeCu)	0.19	0.03	6.33
Kapton Overcoating	0.31	0.57	0.54
Parylene C Overcoating	0.22	0.34	0.65
Teflon Overcoating	0.12	0.38	0.32
GSFC DArk Mirror Coating-SiO-Cr-Al	0.86	0.04	21.50
GSFC Composite SiO _x -Al ₂ O ₃ -Ag	0.07	0.68	0.10
Helios Second Surface Mirror/Silver Backing			
Initial	0.07	0.79	0.09
24 Hours at 5 Suns	0.07	0.80	0.09
48 Hours at 11 Suns + P+	0.08	0.79	0.10
Inconel with Teflon Overcoating-1mil	0.55	0.46	1.20
Vespel Polyimide SP1	0.89	0.90	0.99
Aclar Film (Aluminum Backing)			
1 mil	0.12	0.45	0.27
2 mil	0.11	0.62	0.18
5 mil	0.11	0.73	0.15
Kapton Film (Aluminum Backing)			
0.08 mil	0.23	0.24	0.96
0.15 mil	0.25	0.34	0.74
0.25 mil	0.31	0.45	0.69
0.50 mil	0.34	0.55	0.62
1.0 mil	0.38	0.67	0.57
1.5 mil	0.40	0.71	0.56
2.0 mil	0.41	0.75	0.55
3.0 mil	0.45	0.82	0.55
5.0 mil	0.46	0.86	0.53
Kapton Film (Chromium-Silicon Oxide-Aluminum Backing (Green))			
1.0 mil	0.79	0.78	1.01
Kapton Film (Aluminum-Aluminum Oxide Overcoating)-1 mil			
Initial	0.12	0.20	0.60
1800 ESH UV	0.12	0.20	0.60
Kapton Film (Aluminum-Silicon Oxide Overcoating)-1 mil			
Initial	0.11	0.33	0.33
2400 ESH UV	0.22	0.33	0.67
Kapton Film (Silver-Aluminum Oxide Overcoating)-1 mil			
Initial	0.08	0.19	0.42
2400 ESH UV	0.08	0.21	0.38
Kapton Film (Aluminum-Silicon Oxide Overcoating)-0.5 mil			
Initial	0.12	0.18	0.67
4000 ESH UV	0.28	0.24	1.17
Kimfoil-Polycarbonate Film (Aluminum Backing)			
0.08 mil	0.19	0.23	0.83
0.20 mil	0.20	0.30	0.67
0.24 mil	0.17	0.28	0.61
Mylar Film			
Aluminum Backing			
0.15 mil	0.14	0.28	0.50
0.25 mil	0.15	0.34	0.44
3.0 mil	0.17	0.76	0.22
5.0 mil	0.19	0.77	0.25
Skylab Sail			
Initial	0.15	0.35	0.43
1900 ESH UV	0.19	0.36	0.53

Contrôle thermique

Skylab Parasol Fabric (Orange)			
Initial	0.51	0.86	0.59
2400 ESH UV	0.65	0.86	0.76
Teflon (Gold Backing)			
0.5 mil	0.30	0.49	0.61
1.0 mil	0.26	0.58	0.45
Teflon Aluminum Backing			
2 mil	0.08	0.66	0.12
5 mil	0.13	0.81	0.16
10 mil	0.13	0.87	0.15
Gold Backing			
0.5 mil	0.24	0.43	0.56
1.0 mil	0.22	0.52	0.42
5.0 mil	0.22	0.81	0.27
10 mil	0.23	0.82	0.28
Silver Backing			
2 mil	0.08	0.68	0.12
5 mil	0.08	0.81	0.10
10 mil	0.09	0.88	0.10
Tefzel (Gold Backing)			
0.05 mil	0.29	0.47	0.62
1.0 mil	0.26	0.61	0.43

Tapes	a	e	a/e
235-3M Black	0.95	0.90	1.06
425-3M Aluminum Foil	0.20	0.03	6.67
850-3M Mylar-Aluminum Backing	0.15	0.59	0.25
7361-Mystic Alummized Kapton	0.09	0.03	3.00
7452- Mystic Aluminum Foil	0.14	0.03	4.67
7800-Mystic Aluminum Foil	0.21	0.03	7.00
Y9360-3M Aluminized Mylar	0.19	0.03	6.33

Annexe 3 : Thermal Environments

*Earth's Thermal Environment
extracted from Thermal Environments JPL D-8160*

Low Earth Orbit (LEO) Thermal Environments

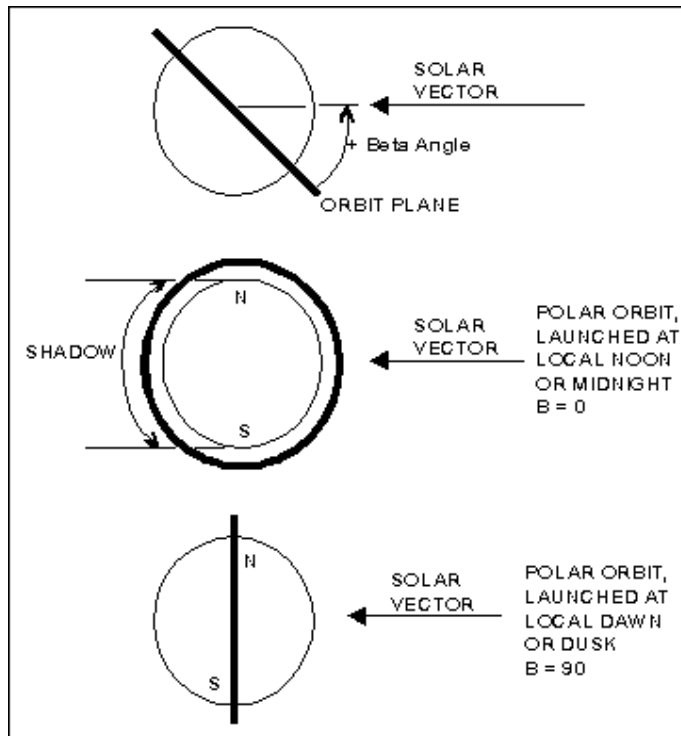
The following table summarizes the range of Direct Solar, Reflected Solar (Albedo), and Planetary Infrared for the planet Earth.

	Perihelion	Aphelion	Mean
Direct Solar	1414 W/sqM	1323 W/sqM	1367.5 W/sqM (433.6 Btu/ft ² -hr)
Albedo (global annual average)	0.30+/-0.01	0.30+/-0.01	0.30+/- .01
Planetary IR (global annual average)	234 +/-7 W/sqM	234+/-7 W/sqM	234 +/-7 W/sqM (72 to 76 Btu/ft ² -hr)

The variation in solar constant of approximately +3.5% about the mean value of 1367.5 w/m² is due to the eccentricity of the Earth orbit. Perihelion (closest position to the Sun) occurs on or near December 21 each year and aphelion (furthest position from the Sun) occurs on or near June 21. For spacecraft thermal balance problems, this variation is frequently ignored, and either the perihelion value of 141 w/m² or the annual mean value of 1367.5 w/m² is used.

Beta Angle:

Another much more profound effect on Direct Solar energy for LEO missions is that of orbital Beta angle which, in combination with altitude, defines the percentage of time in sunlight. Beta angle is defined as the angle between the orbit plane and the vector from the Sun as shown below.



The extreme effects on orbital shadowing are shown above. For a polar orbit launched at local noon or midnight, the resulting initial Beta angle is 0 degrees which gives maximum Earth shadowing. For an orbit altitude of 150 nautical miles (~ 280 km), which is the lowest generally practical considering orbital decay physics, the resulting sunlight is 59% of the orbit time (i.e., about 53 minutes sunlight, 37 minutes shadow). Similarly, a polar orbit mission launched at local dawn or dusk results in a 90 degree Beta angle, with 100% sunlight.

Beta angle is a function of all the following variables and is therefore somewhat complex: inclination of the orbit, altitude, time of the mission, time of year of launch, and time of day of the launch. It varies as the mission progresses due to changes in the Earth-Sun inertial relationship (rotation of the Earth about the Sun), and orbit precession effects (non-uniformity of the Earth's gravitational field, etc.). The extreme values of Beta angle over a year's time for a mission launched at a given orbit inclination, I , are $\pm (I+23.45)$ degrees. In other words, for a due east launch from KSC, $I=28.5$ degrees, and Beta angle will vary from about +52 degrees to -52 degrees over the course of a year.

The fundamental effect of Beta angle is its influence on percent sunlight during any given orbit. Note that the percent sunlight does not fall below 59% for normal LEO missions.

Earth Reflected Solar (albedo):

The variation in the Earth's albedo is a function of latitude, cloud cover, ice fields and perhaps time of year. Table 1 shows variation with latitude and some idea of the annual variation. Note that albedo is lowest (~ 0.23) at the equator and up to ~0.7 at the poles.

The albedo of the Earth is normally treated as fully diffuse, but there has been some

theoretical work implying specular (forward scattering) of the polar ice caps.

Most spacecraft thermal balance problems in Low Earth Orbit assume an albedo of 0.3 with a cosine reduction in the reflected energy from the subsolar point of the orbit to the terminator. A more strict integration of albedo from Table 1 for a KSC mission launched due East (i.e., inclination = 28.5 degrees) results in a value of 0.25. The variations shown in Table 1 are seldom of importance except to extremely sensitive instruments or detectors. However, long duration polar orbit missions should probably account for the increase at the poles.

Earth Planetary Infrared:

The Earth's planetary infrared emission is a function of latitude, cloud cover, large area weather phenomena, land masses, forestation, and perhaps time of year. Variations with latitude and annual range are shown in Table 2. Note that the peak values are in the tropical zones about 20 degrees either side of the equator, and the minimums are at the poles where albedo is maximum. As in the case of albedo, most spacecraft thermal balance problems ignore the variations of Table 2 and assume a uniform emission of 241 W/sq M (81 BTU/sq ft-hr). Again, long duration polar missions should consider the reduction at the poles.

Table 1. Zonal Mean Albedos for the Planet Earth

Latitude	Range	Annual Mean Albedo	Annual Range
90	80	0.67	0.44 to 0.75
80	70	0.57	0.49 to 0.83
70	60	0.46	0.39 to 0.78
60	50	0.41	0.37 to 0.56
50	40	0.36	0.32 to 0.46
40	30	0.31	0.26 to 0.37
30	20	0.26	0.25 to 0.30
20	10	0.24	0.20 to 0.27
10	0	0.25	0.24 to 0.26
0	-10	0.23	0.21 to 0.25
-10	-20	0.23	0.21 to 0.24
-20	-30	0.24	0.23 to 0.25
-30	-40	0.29	0.27 to 0.30
-40	-50	0.35	0.33 to 0.39
-50	-60	0.42	0.41 to 0.47
-60	-70	0.51	0.46 to 0.77
-70	-80	0.64	0.61 to 0.88
-80	-90	0.70	0.40 to 0.80

Table 2. Zonal Mean Planetary Infrared Emission for the Planet Earth

Latitude	Range	Annual Mean W/Sq M	Annual Range W/Sq M
90	80	177	146 to 207
80	70	179	149 to 212
70	60	191	164 to 224
60	50	201	175 to 228
50	40	217	191 to 244
40	30	239	217 to 263
30	20	258	248 to 269
20	10	254	236 to 270

10	0	241	232 to 251
0	-10	251	240 to 261
-10	-20	262	248 to 276
-20	-30	259	254 to 263
-30	-40	239	229 to 253
-40	-50	218	205 to 232
-50	-60	203	187 to 217
-60	-70	185	161 to 209
-70	-80	159	124 to 200
-80	-90	135	94 to 190

Geosynchronous Earth Orbit (GEO) Thermal Environments

The following table summarizes the range of direct Solar, Reflected Solar (Albedo), and Planetary Infrared for a Geosynchronous orbit about Earth.

	Perihelion	Aphelion	Mean
Direct Solar	1414 W/sq M	1323 W/sq M	1367.5 W/sq M (433.6 BTU/sq ft-hr)
Reflected Solar (Albedo) *			
o Subsolar Peak	7.19 W/sq M	6.72 W/sq M	6.95 W/sq M (2.2 BTU/sq ft-hr)
o Orbit Average	2.72 W/sq M	2.54 W/sq M	2.63 W/sq M (0.83 BTU/sq ft-hr)
Planetary Infrared*			
o Orbit Average	5.52 W/sq M	5.52 W/sq M	5.52 W/sq M (1.75 BTU/sq ft-hr)

** As received by the spacecraft at GEO compared to the energy at the planet's thermodynamic system boundary in other tables.*

The thermal environment in Geosynchronous Earth Orbit is much simpler to define than in LEO. The direct solar term varies only with time of year except for two occultation periods when the spacecraft enters the Earth shadow each year. These occultations occur each day over a 45- to 50-day period twice a year, and last up to 71 minutes.

Both the reflected solar terms and planetary infrared terms are small in GEO. In the table above, the view factor from a spacecraft at 35,743 km (22,204 st. mi.) has been included since altitude is constant (compared with the LEO section where altitude is a variable). In addition, for the reflected solar term, an orbit average value is shown. The values of these terms are so small at this altitude that they are encompassed by any reasonable uncertainty in the direct solar term.

Annexe 4

**NOTIONS DE THÉORIE QUANTIQUE DE L'ÉMISSION
D'ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES**

**§ 4.1. Densité de types d'oscillations dans les cavités
électromagnétiques. Formule de Planck**

Densité de types d'oscillations dans une cavité résonnante. — Considérons un parallélépipède de grandes dimensions à parois métalliques (fig. 4.1, a). Choisissons la longueur des arêtes L_x , L_y et L_z

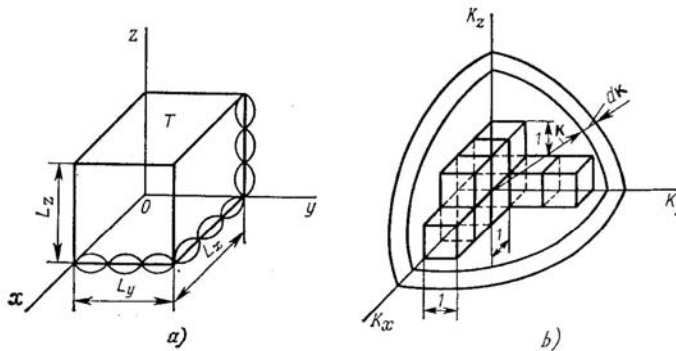


Fig. 4.1

de telle sorte qu'elle soit beaucoup plus grande que la longueur d'onde $\lambda = c/v$ du type d'oscillations du champ électromagnétique dans cette cavité, dont la fréquence est la plus basse. En vertu des lois qui régissent le spectre du corps noir, un champ électromagnétique (ondes électromagnétiques) peut être créé dans une telle « boîte » en chauffant par exemple ses parois à une température déterminée $T > 0$. La source de champ est dans ce cas constituée par les vibrations thermiques des atomes. En électrodynamique classique, les intensités du champ électrique $\vec{E}(\mathbf{r}, t)$ et magnétique $\vec{H}(\mathbf{r}, t)$ s'expriment d'après les équations de Maxwell par un *potentiel vecteur* $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (4.2)$$

Chacune des trois composantes cartésiennes (A_x, A_y, A_z) du potentiel vecteur du champ électromagnétique libre satisfait à l'équation d'onde

$$\nabla^2 A_x(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.3)$$

Quand $L_x, L_y, L_z \gg \lambda$, le champ électromagnétique produit à l'intérieur de la cavité par l'agitation thermique des atomes peut se présenter sous la forme de superposition de différents types d'ondes monochromatiques planes, c'est-à-dire par le développement du potentiel vecteur en série :

$$A_x(\mathbf{r}, t) = \sum_{n_x, n_y, n_z} A_{n_x, n_y, n_z}^{(x)}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (4.4)$$

où

$$A_{n_x, n_y, n_z}^{(x)}(t) = A_{n_x, n_y, n_z}^{(x)}(0) \exp(-i\omega t); \quad |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$$

est la valeur absolue du vecteur d'onde.

Les conditions de périodicité des ondes stationnaires le long des arêtes de la cavité

$$L_x = n_x \frac{\lambda}{2}, \quad L_y = n_y \frac{\lambda}{2}, \quad L_z = n_z \frac{\lambda}{2} \quad (4.5)$$

déterminent une combinaison de valeurs discrètes possibles des composantes cartésiennes du vecteur d'onde :

$$k_x = \frac{\pi}{L_x} n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L_y} n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{L_z} n_z, \quad (4.6)$$

où n_x, n_y, n_z sont des entiers positifs (1, 2, 3, ..., ∞).

En introduisant la série (4.4) dans l'équation d'onde (4.3), on obtient une relation dite de dispersion qui lie la pulsation ω au vecteur d'onde :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2/c^2. \quad (4.7)$$

Comme il s'ensuit de (4.6), chaque type d'oscillations (mode) peut être lié à un élément de volume dans l'espace des vecteurs d'onde \mathbf{k} (au volume de mode) :

$$\Delta k = \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z}. \quad (4.8)$$

Pour $L_x = L_y = L_z = L$, en tenant compte de ce que les valeurs minimales $\Delta n_x = \Delta n_y = \Delta n_z = 1$, on peut déterminer le volume spécifique occupé par un seul mode dans l'espace \mathbf{k} :

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 = \frac{\pi^3}{V_{\text{cav}}}, \quad (4.9)$$

où V_{cav} est le volume de la cavité.

Contrôle thermique

Le nombre de modes pour lesquels les composantes du vecteur d'onde sont comprises dans l'intervalle $\Delta \mathbf{k}$ est égal à

$$\Delta n = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \left(\frac{L}{\pi} \right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \quad (4.10)$$

Le système de points correspondant à chaque triplet de nombres positifs n_x, n_y, n_z (à chaque mode) forme un réseau cubique dans l'espace des impulsions (fig. 4.1, b). Pour de fortes valeurs de n_x, n_y, n_z (pour $\lambda \ll L$), le nombre de petits cubes sera si grand que le volume $\Delta \mathbf{k} = \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ sera égal avec une précision suffisante à $1/8$ de volume d'une sphère de rayon k :

$$\Delta \mathbf{k} = \frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi k^3 \right). \quad (4.11)$$

En divisant (4.11) par le volume d'un seul mode (4.9) et en tenant compte du fait qu'à chaque valeur de k_x, k_y, k_z correspondent deux orientations possibles du vecteur $\vec{\mathcal{E}}$ (vu que toute onde ayant une polarisation quelconque, circulaire ou elliptique, peut toujours être représentée par la superposition de deux ondes ayant des polarisations rectilignes orthogonales)⁽¹⁾, on obtient finalement pour le nombre total de modes dans l'intervalle de 0 à k l'expression suivante:

$$N_k = \frac{k^3 V_{\text{cav}}}{3\pi^2} = \frac{\omega^3 V_{\text{cav}}}{3\pi^2 c^3} = \frac{8\pi v^3 V_{\text{cav}}}{3c^3}. \quad (4.12)$$

Puisque pour des valeurs élevées de n_x, n_y, n_z l'adjonction d'une unité à chacun de ces nombres fait varier très peu la pulsation ω , comme ceci résulte des expressions (4.6) et (4.7), on peut considérer que la pulsation ω intervenant dans (4.12) varie de façon quasi continue. Aussi, pour déterminer le nombre de types d'oscillations dans l'intervalle de ω à $\omega + d\omega$ (*densité de modes*), peut-on dériver l'expression (4.12) par rapport à la fréquence, ce qui donne

$$p(\omega) = \frac{1}{V_{\text{cav}}} \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}, \quad (4.13)$$

ou encore

$$p(v) = \frac{1}{V_{\text{cav}}} \frac{dN(v)}{dv} = \frac{8\pi v^2}{c^3}. \quad (4.13a)$$

Cette formule coïncide avec l'expression pour la densité de types de vibrations acoustiques dans une cavité qui a été obtenue pour la première fois par Rayleigh.

⁽¹⁾ Ainsi, on entend par *type d'oscillations (mode)* donné une onde de pulsation ω , de direction de propagation \mathbf{k} et de polarisation \mathbf{e}_α déterminées, \mathbf{e}_α étant le vecteur de polarisation unitaire, α l'indice ne pouvant prendre que l'une de deux valeurs ($\alpha = 1, 2$). Le nombre de photons contenus dans un mode donné est désigné par $n_{k\alpha}$.

Contrôle thermique

Formule de Planck. — La densité d'énergie du rayonnement électromagnétique dans une cavité peut se déterminer en multipliant la densité de modes par l'énergie moyenne $\langle E_\omega \rangle (T)$ du champ d'un seul mode :

$$\rho(\omega) = p(\omega) \langle E_\omega \rangle (T). \quad (4.14)$$

Si l'on admet, comme on le fait en physique classique, que $\langle E_\omega \rangle (T) = kT$, on obtient pour le rayonnement du corps noir la *formule de Rayleigh-Jeans* :

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT, \quad (4.14a)$$

qui conduit à une contradiction avec l'expérience connue sous le nom de « *divergence ultraviolette* » : à toute température $T > 0$, $\rho(\omega) \rightarrow \infty$ si ω croît indéfiniment (courbe 1 de la fig. 4.2).

Cette contradiction entre la théorie et l'expérience a été levée par l'hypothèse de la discontinuité de l'énergie des oscillateurs (Planck, 1900). D'après l'hypothèse de Planck l'énergie d'un oscillateur élémentaire ne peut prendre que des valeurs discontinues $\varepsilon_n = n\hbar\omega = n\varepsilon_0$, où \hbar est la constante de Planck ; $\varepsilon_0 = \hbar\omega$ l'énergie minimale de l'oscillateur ; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. L'énergie moyenne contenue dans chaque mode peut être calculée en divisant la somme des énergies de tous les oscillateurs élémentaires participant au type d'oscillations donné par le nombre total d'oscillateurs dans le mode :

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N_n \varepsilon_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N_n}. \quad (4.15)$$

Suivant la distribution de Boltzmann en équilibre thermodynamique (v. § 5.1), le nombre d'oscillateurs d'énergie $\varepsilon_n = n\varepsilon_0$ est égal à

$$N_n(T) = N_0 \exp(-n\varepsilon_0/kT), \quad (4.16)$$

où N_0 est le nombre total d'oscillateurs dans l'état fondamental (non excité), c'est-à-dire pour $n = 0$.

En portant (4.16) dans (4.15) et en notant $x = \exp(-\varepsilon_0/kT)$, on obtient

$$\langle E_\omega \rangle = \varepsilon_0 x \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots} = \varepsilon_0 x \frac{1/(1-x)^2}{1/(1-x)} = \frac{\varepsilon_0 x}{1-x} = \frac{\varepsilon_0}{x^{-1}-1}.$$

Ainsi, l'énergie moyenne d'un mode a pour expression

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (4.17)$$

Dans le cas des fréquences très basses ou des températures très élevées ($\hbar\omega \ll kT$), en développant l'exponentielle figurant au dénominateur de (4.17) en série suivant les puissances de la petite quanti-

Contrôle thermique

té $(\hbar\omega/kT)$ et en ne gardant que les deux premiers termes de ce développement, on obtient $\exp(\hbar\omega/kT) \approx 1 + \hbar\omega/kT$. A cette condition la formule (4.17) donne le résultat classique: $\langle E_\omega \rangle (T) \approx kT$. Dans l'autre cas limite ($\hbar\omega \gg kT$), en négligeant au dénominateur de (4.17) l'unité par rapport à l'exponentielle, on obtient

$$\langle E_\omega \rangle = \hbar\omega \exp(-\hbar\omega/kT). \quad (4.18)$$

Si l'on introduit (4.18) dans (4.14), on obtient la *formule de Wien* qui est en bon accord avec la courbe expérimentale aux fré-

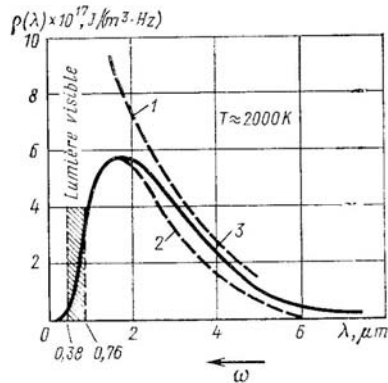


Fig. 4.2

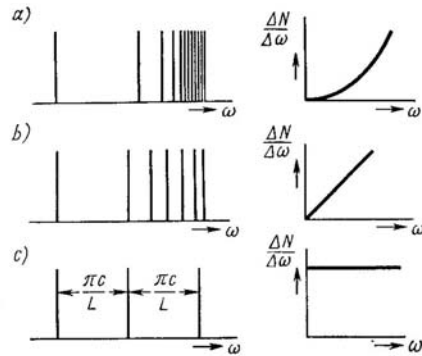


Fig. 4.3

quences élevées (petites longueurs d'onde λ) mais en contradiction avec l'expérience dans le domaine d'« ondes longues » du spectre (courbe 2 de la fig. 4.2). Dans le cas général, c'est-à-dire dans toute l'étendue du spectre d'oscillations électromagnétiques et à toutes les températures, la densité de l'énergie dans le spectre du rayonnement du corps noir (courbe 3 de la fig. 4.2) obéit à la formule de Planck

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \quad (4.19)$$

ou

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (4.19a)$$

que l'on obtient en portant (4.17) dans (4.14). En SI, la densité d'énergie s'exprime par $J/(m^3 \cdot Hz)$.

La densité d'énergie du rayonnement peut également se caractériser par le nombre moyen de quanta que comporte un type d'oscillations donné :

$$\langle n_\omega \rangle = \frac{\langle E_\omega \rangle}{\hbar\omega} = [\exp(\hbar\omega/kT) - 1]^{-1}. \quad (4.20)$$

Le nombre $\langle n_\omega \rangle$ s'appelle *facteur d'excitation du champ de rayonnement* à une fréquence donnée ⁽¹⁾. Compte tenu de (4.20), la formule donnant la densité d'énergie du rayonnement (4.14) peut s'écrire sous la forme

$$\rho(\omega) = p(\omega) \langle n_\omega \rangle \hbar\omega. \quad (4.21)$$

Autrement dit, la densité d'énergie du rayonnement électromagnétique dans une cavité résonnante est égale au produit du nombre de modes $p(\omega)$ contenus dans l'unité de volume et l'intervalle unité de fréquence par le nombre moyen de quanta dans le mode $\langle n_\omega \rangle$ et par l'énergie d'un quantum $\hbar\omega$.

Densité de types d'oscillations dans des résonateurs bidimensionnel et unidimensionnel. — Dans un résonateur à cavité, $p(\omega)$ est une fonction quadratique de la fréquence (fig. 4.3, a). Lorsque la fréquence ω s'élève, le spectre se condense, si bien qu'aux fréquences très élevées les modes distinctes se recouvrent (par suite de l'élargissement des raies $\Delta\omega_{1/2} \sim \omega^{1/2}$ dû aux pertes par effet Joule dans les parois du résonateur lorsque ω s'élève). Pour un résonateur à deux dimensions on a

$$\frac{\Delta N}{\Delta\omega} = \frac{S\omega}{\pi c^2} \quad (4.22)$$

où S est l'aire de la région bidimensionnelle.

Dans ces conditions, la condensation du spectre avec l'augmentation de la fréquence suit une loi linéaire (fig. 4.3, b). Pour un résonateur à une dimension de longueur L , la condition de résonance se présente sous la forme la plus simple :

$$L = q \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi c}{\omega} q, \quad (4.23)$$

où $q = 1, 2, 3, \dots$

On en tire pour l'écart en fréquence entre les modes

$$\Delta\omega_{q, q+1} = \frac{\pi c}{L} \Delta q_{\min} = \frac{\pi c}{L} \quad (4.24)$$

puisque $\Delta q_{\min} = 1$. Dans ce cas la densité de modes par intervalle unité est indépendante de la fréquence (fig. 4.3, c) :

$$\frac{\Delta N}{\Delta\omega} = \frac{2L}{\pi c} \quad (4.25)$$

C'est une particularité très importante du résonateur linéaire, qui permet de l'utiliser jusqu'en fréquences très élevées comme emmagasineur à haute surtension de l'énergie du champ électromagnétique sur des modes sélectionnés (appelés *modes longitudinaux*) dans le circuit de rétroaction des *lasers*.

⁽¹⁾ Si l'on écrit tous les indices qui caractérisent un mode donné, c'est-à-dire $\langle n_{\omega k \alpha} \rangle$ ou $\langle n_{k \alpha} \rangle$, cette quantité déterminera le nombre moyen de quanta dans un mode déterminé de ω , k et e_α donnés.

§ 4.2. Onde électromagnétique plane considérée comme un oscillateur harmonique virtuel. Théorie quantique (photonique) de la lumière

L'hypothèse de la discontinuité de l'énergie des oscillateurs électromagnétiques émise par Planck a conduit Einstein à cette conclusion que non seulement le rayonnement est émis ou absorbé par des quantités discontinues d'énergies appelées *quanta* $\hbar\omega$, mais qu'il se propage dans l'espace sous forme de grains d'énergie appelés *photons* (Einstein, 1905). La *théorie quantique* ou *photonique de la lumière* doit être considérée comme un retour dialectique à la théorie corpusculaire de Newton.

Un passage naturel de l'image classique du champ sous forme d'onde à l'image quantique est constitué par la représentation de l'onde monochromatique donnée par un *oscillateur quantique harmonique* (en abrégé OQH) virtuel dont le degré d'excitation caractérise le nombre moyen de photons par mode.

Considérons une des ondes stationnaires dans le résonateur. Supposons que la polarisation de cette onde est telle que le vecteur \mathbf{A} oscille le long de l'axe x , alors que le vecteur d'onde \mathbf{k} est orienté suivant l'axe z (onde directe) ou dans le sens opposé (onde inverse):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = n_x A_x(t) \cos(k_z z + \varphi) + n_y \cdot 0 + n_z \cdot 0, \quad (4.26)$$

où n_x, n_y, n_z sont les vecteurs unitaires orientés suivant les axes de coordonnées cartésiens; $k = \omega/c$ le nombre d'onde; φ la phase.

Cherchons, suivant les équations (4.1) et (4.2), les composantes électrique $\overline{\mathcal{E}}$ et magnétique $\overline{\mathcal{H}}$ du potentiel vecteur:

$$\overline{\mathcal{E}}_x = -\frac{n_x}{c} \dot{A}_x(t) \cos(k_z z + \varphi), \quad (4.27)$$

$$\overline{\mathcal{H}}_y = n_y k_z \dot{A}_x(t) \sin(k_z z + \varphi). \quad (4.28)$$

L'énergie totale du champ électromagnétique de ce mode est donnée par l'intégrale sur le volume de mode V_{mode} :

$$E_\omega = \int_{V_{\text{mode}}} \frac{\overline{\mathcal{E}}_x^2 + \overline{\mathcal{H}}_y^2}{8\pi} dV = \frac{V_{\text{mode}}}{8\pi c^2} (\dot{A}_x^2 + \omega^2 A_x^2). \quad (4.29)$$

Cette expression est tout à fait identique à la formule donnant l'énergie d'un oscillateur harmonique

$$E = (m/2) (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) \quad (4.30)$$

si l'on pose $q = A_x$ et

$$m_{\text{em}} = V_{\text{mode}} / 4\pi c^2. \quad (4.31)$$

Il est évident que tout type d'oscillations dans le résonateur peut être considéré comme un oscillateur harmonique virtuel dont l'énergie est donnée par une expression du type (4.30). Puis, en faisant

usage des méthodes habituelles de la mécanique quantique, il faut imposer à ces oscillateurs les conditions quantiques.

Comme il a été montré au § 3.10, les valeurs propres de l'énergie d'un oscillateur harmonique linéaire (OHL) ont pour expressions

$$E_n = \hbar\omega (n + 1/2), \quad (4.32)$$

où $n = 1, 2, 3, \dots$

Dans le cas d'un oscillateur électromagnétique virtuel, on doit entendre par n le nombre moyen de photons $\langle n_{\mathbf{k}\alpha} \rangle$ dans un mode donné. A la température de zéro absolue des parois du résonateur ($T = 0$ K), lorsque d'après l'expression (4.20) $\langle n_{\mathbf{k}\alpha} \rangle = 0$, l'énergie de chaque mode n'est pas nulle. La quantité $E_0 = \hbar\omega/2$ s'appelle *énergie de point zéro*. La sommation de $E_0(\omega)$ sur tout le nombre infiniment grand de modes donne un résultat divergent ($\sum_{\mathbf{k}\alpha} E_{0\mathbf{k}\alpha}(\omega) \rightarrow \infty$). C'est la manifestation d'une des difficultés fondamentales de l'électrodynamique quantique qui tient à ce que sa clôture logique n'est pas complète. C'est pourquoi, lorsqu'on examine les valeurs propres de l'énergie totale du champ dans un résonateur, on tourne cette difficulté en omettant tout simplement l'énergie de point zéro vu que dans la majorité écrasante des expériences ce n'est pas l'énergie totale E_Σ elle-même du champ électromagnétique qui est mesurée mais seulement l'énergie d'excitation du champ par rapport aux oscillations zéro:]

$$E = E_\Sigma - E_0 = \sum_{\mathbf{k}\alpha} n_{\mathbf{k}\alpha} \hbar\omega. \quad (4.33)$$

En plus de l'énergie $\varepsilon = \hbar\omega$, chaque photon se caractérise par l'impulsion $\mathbf{p}_{\text{phot}} = \hbar\mathbf{k}$ qui détermine la direction de sa propagation et la quantité de mouvement $|\mathbf{p}_{\text{phot}}| = 2\pi\hbar/\lambda = \hbar\omega/c$ ainsi que par le moment cinétique propre, c'est-à-dire par le spin \mathbf{p}_s (propriété interne du photon, qui remplace la notion classique de polarisation de l'onde). Le rôle de la fonction d'onde du photon est joué par le vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ astreint à la condition d'être transversal et équivalent à un *spineur* du deuxième rang. La fonction d'onde d'une particule de spin s étant, d'après le paragraphe 3.13, l'ensemble des $(2s + 1)$ composantes (c'est-à-dire un spineur symétrique de rang $2s$), on doit attribuer au photon un spin égal à l'unité (en unités \hbar). Pourtant on ne perdra pas de vue que le spin du photon ne peut pas être considéré comme un moment propre d'une particule au repos car pour des photons se propageant avec la vitesse de la lumière les états de repos n'existent pas. La projection du spin du photon sur la direction de son impulsion s'appelle *héllicité*.

L'impulsion d'un photon est en principe impossible à mesurer d'une manière aussi rapide et précise que l'on voudrait. En effet, à partir de la relation d'incertitude

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \quad (4.34)$$

Contrôle thermique

et compte tenu de l'égalité $\Delta E = (\partial E / \partial p_{\text{phot}}) \Delta p_{\text{phot}} = v \Delta p_{\text{phot}}$ on obtient pour un photon ($v = c$)

$$\Delta p_{\text{phot}} \Delta t \sim \hbar / c. \quad (4.35)$$

Quand $\Delta p_{\text{phot}} \rightarrow 0$, la durée de la mesure doit être infiniment grande. C'est pourquoi la valeur finie de la vitesse de la lumière ne permet pas de décrire le photon à l'aide d'une fonction d'onde dépendant des impulsions. A partir de la fonction d'onde du photon il est impossible de déterminer l'amplitude de la probabilité de sa localisation dans l'espace comme ceci se fait généralement en mécanique quantique non relativiste. L'incertitude minimale sur la coordonnée du photon est toujours égale à

$$\Delta q \sim \hbar / \Delta p_{\text{phot}} = \hbar / m_{\text{phot}} c. \quad (4.36)$$

On ne peut donc parler des coordonnées du photon que dans le cas classique limite de l'optique géométrique lorsque la longueur d'onde $\lambda_{\text{lum}} \sim 1/k \sim \Delta q$ est petite par rapport à d'autres dimensions caractéristiques. A la limite quantique lorsque λ_{lum} ne peut plus être considérée comme petite devant les inhomogénéités caractéristiques du champ de potentiel, la notion elle-même de coordonnée du photon perd son sens physique. Comme l'impulsion \mathbf{p}_{phot} et la coordonnée q du photon sont impossibles à mesurer avec précision, ces quantités ne peuvent pas être utilisées comme variables dynamiques dont dépend la fonction d'onde de la particule.

Dans la théorie quantique du champ électromagnétique, ce sont les nombres de photons $n_{\mathbf{k}\alpha}$ dans un mode donné ou les *nombres d'occupation des états* qui font office de variables indépendantes. En agissant sur les fonctions des nombres d'occupation, les opérateurs de « création » $\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^+$ ou d'« annihilation » $\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^-$ conduisent respectivement à une augmentation ou à une diminution de ces nombres d'une unité. Ainsi, seules les transitions suivantes sont possibles : $n_{\mathbf{k}\alpha} \rightarrow n_{\mathbf{k}\alpha} + 1$ ou $n_{\mathbf{k}\alpha} \rightarrow n_{\mathbf{k}\alpha} - 1$. Dans le premier cas les éléments matriciels de l'opérateur $\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^+$ sont différents de zéro et dans le second cas ceux de l'opérateur $\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^-$. Ces opérations mathématiques sont caractéristiques de la *méthode dite de seconde quantification*⁽¹⁾ appliquée dans le cas des systèmes contenant un grand nombre de particules identiques. Dans de tels systèmes, on ne peut déterminer que les distributions de probabilités de différentes valeurs des nombres d'occupation, alors que le système lui-même se décrit à l'aide d'une fonction d'onde « dans l'espace des nombres d'occupation » : $\Phi(n_1, n_2, \dots, t)$. Le carré du module $|\Phi|^2$ caractérise la probabilité de différents nombres d'occupation des modes n_1, n_2, \dots .

⁽¹⁾ Cette quantification est dite seconde parce que par quantification première on entend la représentation des ondes électromagnétiques planes sous forme des oscillateurs quantiques virtuels.

§ 4.3. Coefficients d'Einstein d'émission spontanée et d'émission stimulée de la lumière

Envisageons un système quantique à deux niveaux (fig. 4.4, a) occupant dans le vide un certain volume protégé contre l'action d'un champ électromagnétique. Pour abrégé nous appellerons un tel système microscopique *système* μ en entendant par là tout système quantique (noyau, atome, molécule ⁽¹⁾). Si le volume dans lequel est placé un système μ est suffisamment grand et le nombre de systèmes μ identiques qu'il renferme est tel que les collisions entre

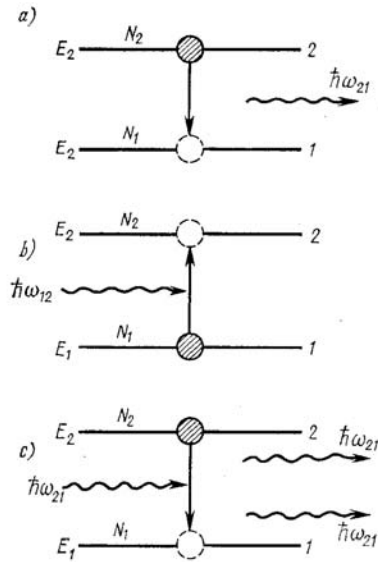


Fig. 4.4

les systèmes et sur les parois peuvent être négligées, la seule action subie par le système μ est celle de la part des oscillations zéro du champ électromagnétique. Si, à l'instant initial $t = 0$, le système μ se trouvait dans un état excité 2 d'énergie E_2 , il peut, à l'instant suivant, en tendant vers un minimum d'énergie, passer sous l'action des oscillations zéro à l'état 1, en émettant un quantum de lumière d'énergie $\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1$. Le phénomène d'émission d'un photon par un système μ qui passe d'un état à un autre par suite de l'interaction avec les oscillations zéro du champ électromagnétique est appelé *émission spontanée de la lumière*.

Les processus spontanés ont un caractère aléatoire parce qu'ils sont dus aux fluctuations du champ. On peut donc les étudier statistiquement

en examinant le comportement d'un ensemble de systèmes μ , c'est-à-dire d'un certain système macroscopique constitué d'un grand nombre ($N_\mu \gg 1$) de systèmes μ identiques sans interaction (ou en interaction faible). Pour plus de simplicité un tel système macroscopique sera appelé système M . Bien que du fait du caractère de fluctuations des oscillations zéro du champ il soit impossible de dire ce que deviendra un système μ donné au bout d'un laps de temps dt compris dans l'intervalle de t à $t + dt$, on peut néanmoins introduire pour tout le système M la notion de probabilité de tran-

⁽¹⁾ Un système quantique à deux niveaux est une abstraction, car en pratique il ne se rencontre pas. Des objets quantiques réels (noyaux, atomes, molécules) sont des systèmes à plusieurs niveaux. Pourtant le modèle à deux niveaux s'avère bien commode pour l'étude de l'interaction par résonance entre la matière et le rayonnement parce qu'il décrit bien le caractère des processus.

sition A_{21} par unité de temps d'un des systèmes μ de l'état 2 à l'état 1 (transition $2 \rightarrow 1$):

$$dZ_{21} = A_{21}N_2(t) dt, \quad (4.37)$$

où dZ_{21} est le nombre de transitions $2 \rightarrow 1$ dans tout le système M pendant le temps dt ; $N_2(t)$ le nombre de systèmes μ se trouvant à l'instant t dans l'état 2 (N_2 est appelé *population du niveau supérieur*).

La quantité A_{21} qui ne dépend pas du temps et a les dimensions s^{-1} est appelée *coefficient intégral d'Einstein d'émission spontanée* (Einstein, 1916). Il est évident que $dZ_{21} = -dN_{21}$, si bien que l'équation (4.37) peut s'écrire sous la forme

$$-dN_2 = A_{21}N_2(t) dt. \quad (4.38)$$

En intégrant cette équation et en déterminant la constante d'intégration à partir de la condition initiale ($N_2(t=0) = N_{20}$), on obtient

$$N_2(t) = N_{20} \exp(-A_{21}t). \quad (4.39)$$

Cette expression traduit la loi de décroissance de la population du niveau supérieur (excité) lors des transitions spontanées que ces dernières se produisent entre les niveaux d'énergie d'un noyau atomique (dans ce cas le coefficient A_{21} a le sens de constante de désintégration radioactive), d'un atome ou d'une molécule.

L'intensité de l'émission spontanée I_{sp} (puissance de rayonnement) est égale à l'énergie émise par tout le système M par unité de temps au cours des transitions qui se produisent sous l'effet des oscillations zéro du champ:

$$I_{sp}(t) = -\frac{dE}{dt} = -\frac{\hbar\omega_{21} dZ_{21}}{dt} = A_{21}N_{20}\hbar\omega_{21} \exp(-A_{21}t). \quad (4.40)$$

En notant $A_{21}N_{20}\hbar\omega_{21} = I_{sp}(0)$ ($I_{sp}(0)$ étant la puissance de l'émission spontanée à l'instant $t=0$), on peut récrire l'expression (4.40) sous la forme

$$I_{sp}(t) = I_{sp}(0) \exp(-A_{21}t). \quad (4.41)$$

On voit que la puissance instantanée de l'émission spontanée est proportionnelle au nombre de particules N_{20} se trouvant primitivement dans un état excité, à la différence d'énergie $E_2 - E_1$ et au nombre de transitions par unité de temps A_{21} (à la vitesse des transitions). Avec le temps, la puissance instantanée du rayonnement décroît suivant une loi exponentielle (si toute l'énergie émise par le système M quitte ce système, c'est-à-dire si les quanta $\hbar\omega_{21}$ ne subissent pas d'auto-absorption à l'intérieur du système).

La durée de vie d'un système μ concret dans l'état supérieur ne peut pas être déterminée de façon précise parce qu'il s'agit des transitions dues à un champ fluctuant: un système μ peut émettre un photon à un instant t donné, mais peut également rester dans

l'état 2 pendant un temps infiniment long. Pourtant, en calculant une moyenne de cette durée pour l'ensemble des systèmes μ , on peut trouver la *durée de vie moyenne* $\bar{\tau}_{21}$ du système μ par rapport à la transition spontanée $2 \rightarrow 1$. La durée de vie globale de tous les systèmes μ constituant l'ensemble donné a pour valeur

$$\tau_{\Sigma} = \int_0^{\infty} t A_{21} N_2(t) dt. \quad (4.42)$$

En introduisant dans (4.42) la valeur de $N_2(t)$ tirée de (4.39), on obtient

$$\bar{\tau}_{21} = \frac{\tau_{\Sigma}}{N_{20}} = \frac{A_{21}}{N_{20}} \int_0^{\infty} t N_{20} e^{-A_{21}t} dt = \frac{1}{A_{21}}. \quad (4.43)$$

Ainsi la durée de vie $\bar{\tau}_{21}$ est l'inverse de la vitesse des transitions spontanées. Compte tenu de (4.43), l'expression (4.41) de la puissance instantanée peut être mise sous la forme

$$I_{sp}(t) = I_{sp}(0) \exp(-t/\bar{\tau}_{21}). \quad (4.44)$$

La quantité A_{21} (ou $\bar{\tau}_{21}$) est une caractéristique quantique d'un système μ concret. Elle varie de façon substantielle d'un système μ à un autre ainsi que d'une transition à une autre entre les niveaux d'énergie d'un même système μ . La valeur de A_{21} dépend des carrés des éléments matriciels $|d_{21}|^2$ des transitions dipolaires (électriques ou magnétiques) du système μ et des cubes de la fréquence de la transition. L'électrodynamique quantique permet de calculer la valeur de A_{21} . Sans effectuer ici des calculs assez fastidieux, indiquons la formule définitive

$$A_{21} = \frac{4 |d_{21}|^2 \omega_{21}^3}{3\hbar c^3}, \quad (4.45)$$

ou encore

$$A_{21} = \frac{64\pi^4 |d_{21}|^2}{3\hbar \lambda_{21}^3} \approx 10^{30} \frac{|d_{21}|^2}{\lambda_{21}^3}. \quad (4.46)$$

Pour $\lambda_{21} \approx 0,5 \mu\text{m}$ (lumière visible) et $d_{21} \approx 1 \text{ D}$ (1 D (Debye) = 10^{-8} unités CGS), $A_{21} \approx 10^7 \text{ s}^{-1}$, c'est-à-dire que $\bar{\tau}_{21} \approx 10^{-7} \text{ s}$. Les résultats du calcul sont en bon accord avec l'expérience.

Ainsi, dans le domaine optique du spectre, la durée de vie moyenne d'un système dans un état excité pour des transitions spontanées permises par les règles de sélection (v. § 3.14) n'excède pas 10^{-7} à 10^{-8} s . Si les transitions sont interdites à l'approximation dipolaire ($|d_{21}| = 0$), la durée de vie accuse une brusque croissance (état métastable).

La valeur finie de la durée de vie $\bar{\tau}_{21}$ du système dans l'état excité conduit en vertu de la relation d'incertitude à un élargissement naturel de tous les états excités d'une quantité de l'ordre de $\Delta E_2 \sim$

$\sim \hbar/\bar{\tau}_{21}$ (ou $\Delta\omega_2 \sim \bar{\tau}_{21}^{-1}$). Cet élargissement est appelé *élargissement naturel d'un niveau*. Si le niveau inférieur est fondamental ($\bar{\tau} = \infty$), $\Delta E_1 = 0$. L'élargissement naturel des niveaux conduit à un *élargissement naturel* $\Delta\omega_{nat}$ des raies spectrales. Si les systèmes μ s'entrechoquent, la durée de vie du système dans l'état excité devient inférieure à la durée de vie naturelle, ce qui provoque un élargissement supplémentaire dit *élargissement collisionnel* $\Delta\omega_{col}$. La valeur de $\Delta\omega_{col} \rightarrow 0$ si la pression p du gaz constitué par les systèmes μ tend vers zéro.

Il existe encore un mécanisme qui conduit à l'élargissement des raies spectrales, c'est l'élargissement dû à la dispersion des vitesses des différents systèmes μ . Cette dispersion provoque une dispersion des fréquences émises par l'ensemble des systèmes μ , car en vertu de l'effet Doppler

$$\omega_{21} = \omega_{21}(0) \left(1 \pm \frac{v_\mu}{c} \cos \vartheta \right), \quad (4.47)$$

où $\omega_{21}(0)$ est la fréquence d'émission d'un système μ au repos; v_μ la vitesse du système μ ; ϑ l'angle d'observation (angle formé entre le vecteur \mathbf{v}_μ et la direction d'observation).

L'élargissement par effet Doppler disparaît si l'on a affaire à un rayonnement de vecteur d'onde $\mathbf{k} \perp \mathbf{v}_\mu$, car dans ce cas $\cos \vartheta = 0$.

La quantité A_{21} permet de calculer la puissance de rayonnement d'un système μ distinct:

$$I_{21} = \frac{4}{3} \frac{|d_{21}|^2 \omega_{21}^4}{c^3}. \quad (4.48)$$

Il est intéressant de noter que cette formule finale ne fait pas intervenir la constante de Planck \hbar et qu'elle ne diffère de la formule correspondante de l'électrodynamique classique que par le facteur 4. Cette circonstance est une conséquence du *principe de correspondance* général suivant lequel à la limite classique les carrés des éléments matriciels des oscillations harmoniques se transforment suivant la règle

$$|d_{21}|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \overline{d_{21}^2(t)} \rightarrow \frac{1}{4} d_0^2, \quad (4.49)$$

où d_0 est l'amplitude du moment électrique dipolaire ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ En effet, de par la définition même du carré de la valeur moyenne d'une grandeur physique quelconque et compte tenu de la condition de normalisation de la fonction d'onde (3.40) (v. § 3.3), on a en passant à la limite classique

$$|d_{21}|^2 = \left| \int_{\mathbf{V}} \psi_1^* \hat{d}_{21} \psi_2 d^3r \right|^2 = \frac{1}{2} \overline{d^2(t)} \left| \int_{\mathbf{V}} \psi_1^* \psi_2 d^3r \right|^2 = \frac{1}{2} \overline{d^2(t)}.$$

Si le moment du dipôle varie suivant une loi harmonique ($d(t) = d_0 \cos \omega_{21}t$), on obtient, compte tenu de ce que $\overline{\cos^2 \omega_{21}t} = 1/2$, la formule classique $\bar{I}_{sp} = d_0^2 \omega^4 / 3c^3$ pour l'intensité moyenne de l'émission spontanée du dipôle.

Contrôle thermique

Etant régi par les lois statistiques, l'émission spontanée a un caractère de bruits. En langage classique, cette émission est incohérente, c'est-à-dire qu'entre les phases des ondes émises par les différents systèmes μ il n'existe pas de relation déterminée.

Examinons maintenant les processus qui se déroulent dans l'ensemble des systèmes μ sous l'effet d'un champ électromagnétique extérieur résonnant. Supposons que le système μ reçoit des photons dont l'énergie $\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1$ est exactement égale à la différence d'énergie entre les niveaux de ce système μ (fig. 4.4, b). La probabilité de passage de l'état 1 à l'état 2 (transition $1 \rightarrow 2$) pendant un intervalle de temps dt avec émission d'un photon $\hbar\omega_{21}$ est proportionnelle au nombre de photons (densité d'énergie du champ $\rho_\omega d\omega$) et au nombre $N_1(t)$ de systèmes μ se trouvant à l'instant t dans l'état inférieur :

$$dZ_{12} = B_{12}\rho_\omega N_1(t) dt, \quad (4.50)$$

où B_{12} est le *coefficient d'Einstein d'absorption*.

La probabilité d'absorption d'un quantum par le système μ par unité de temps a pour valeur

$$W_{\text{abs}} = W_{12} = \frac{dZ_{12}}{N_1(t) dt} = B_{12}\rho_\omega. \quad (4.51)$$

Le processus inverse de l'absorption est l'*émission stimulée (induite) de la lumière*. L'hypothèse qu'un tel phénomène existe dans la nature a été émise pour la première fois par Einstein (1916). Au cours de ce phénomène, le système μ se trouvant dans l'état 2 émet un photon secondaire $\hbar\omega_{21}$ identique au photon primaire qui a provoqué cette transition (fig. 4.4, c). En plus de la loi de conservation de l'énergie les transitions stimulées sont régies par la loi de conservation de l'impulsion du photon (l'impulsion $\mathbf{p}_{\text{phot } 2}$ du photon secondaire est égale en grandeur et en signe à l'impulsion $\mathbf{p}_{\text{phot } 1}$ du photon primaire) et par la loi de conservation du spin (le spin du photon secondaire est égal à celui du photon primaire). Ceci signifie que lors des transitions stimulées non seulement la fréquence ω_{21} reste rigoureusement constante mais se conservent également inchangées la direction de propagation et la polarisation de l'onde électromagnétique.

Le nombre de transitions stimulées $2 \rightarrow 1$ effectuées pendant le temps dt a pour expression

$$dZ_{21} = B_{21}\rho_\omega N_2(t) dt, \quad (4.52)$$

où B_{21} est le *coefficient d'Einstein d'émission stimulée*.

La probabilité d'émission, par unité de temps, d'un quantum par un système μ s'écrit

$$W_{\text{ind}} = W_{21} = \frac{dZ_{21}}{N_2(t) dt} = B_{21}\rho_\omega. \quad (4.53)$$

Les coefficients B_{12} et B_{21} peuvent se calculer en mécanique quantique à l'aide de la théorie des perturbations (v. § 3.15) ou se déterminer à partir de l'expression du coefficient A_{21} si l'on connaît la relation entre les coefficients A_{21} et B_{21} . Comme il résulte de l'expression (3.414), la probabilité de transitions stimulées est proportionnelle à la densité de l'énergie du rayonnement tombant sur un système μ , au temps d'action du rayonnement et au carré de l'élément matriciel du moment dipolaire de la transition mais, à la différence de A_{21} , elle est indépendante de la fréquence de la transition.

§ 4.4. Etablissement par Einstein de la formule de Planck

Si un ensemble des systèmes μ est placé à l'intérieur d'un thermostat dont les parois sont portées à une température T , un équilibre thermodynamique doit s'établir entre le système M et le thermostat. En plus du système M le thermostat sera le siège d'un rayonnement thermique émis par ses parois.

Einstein a admis comme un postulat que le rayonnement émis et absorbé par un système M doit être « noir », c'est-à-dire obéir à la formule de Planck, parce que l'ensemble des systèmes μ est en équilibre avec le milieu ambiant. Selon le principe de réversibilité microscopique ou la *loi de l'équilibre en détail*, le nombre des transitions directes, quelles qu'elles soient, doit être égal au nombre des transitions inverses :

$$dZ_{21} = dZ_{12}. \quad (4.54)$$

Par conséquent,

$$(A_{21} + B_{21}\rho_\omega) N_2(t) dt = B_{12}\rho_\omega N_1(t) dt, \quad (4.55)$$

d'où

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}\rho_\omega}{A_{21} + B_{21}\rho_\omega}. \quad (4.56)$$

Comme cet équilibre a un caractère statistique, c'est-à-dire résulte de la symétrie des processus de fluctuations dans un système en équilibre par rapport au changement du signe du temps, la relation $N_2(t)/N_1(t)$ peut s'exprimer également à l'aide de la distribution de Boltzmann (v. § 5.1) :

$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right), \quad (4.57)$$

où g_1 et g_2 sont les poids statistiques respectivement des premier et deuxième états qui caractérisent le degré de dégénérescence d'un niveau donné ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Dans le cas où la dégénérescence est levée, par exemple en présence d'un champ magnétique, le niveau se décompose en $g = 2j + 1$ sous-niveaux, j étant le nombre quantique interne (v. chap. 6).

En égalant entre elles les expressions (4.56) et (4.57), on obtient

$$\frac{B_{12}\rho_\omega}{A_{21} + B_{21}\rho_\omega} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right). \quad (4.58)$$

D'où

$$\rho_\omega = \frac{g_2 A_{21}}{B_{12} g_1 \exp[(E_2 - E_1)/kT] - B_{21} g_2}. \quad (4.59)$$

C'est la formule de la distribution de l'énergie dans le spectre rayonné par un corps parfaitement noir. La formule (4.59) permet de trouver la relation entre les coefficients A_{21} , B_{12} et B_{21} .

Lorsque la température $T \rightarrow \infty$, la densité de rayonnement ρ_ω doit elle aussi croître indéfiniment, ce qui n'est possible que si le dénominateur de l'expression (4.59) est nul :

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}. \quad (4.60)$$

Il en résulte que

$$B_{12} = (g_2/g_1) B_{21}. \quad (4.61)$$

Pour des niveaux non dégénérés,

$$B_{12} = B_{21}, \quad (4.62)$$

c'est-à-dire que les coefficients d'Einstein d'absorption et d'émission stimulée sont soit égaux, soit différents par le rapport des poids statistiques.

En introduisant (4.61) dans (4.59), on obtient

$$\rho_\omega = \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}. \quad (4.63)$$

Pour $h\omega \ll kT$, en développant l'exponentielle en série suivant les puissances de la petite quantité $h\omega/kT$ et en ne gardant que les deux premiers termes du développement, on tire de (4.63)

$$\rho_\omega = \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} \frac{kT}{h\omega}. \quad (4.64)$$

Le rapprochement entre l'expression (4.64) et la formule de Rayleigh-Jeans (4.14a), valable pour $kT \gg h\omega$, permet de conclure que

$$\frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3} = p(\omega) h\omega, \quad (4.65)$$

où $p(\omega) = \omega^3/\pi^2 c^3$ est le nombre de types d'oscillations dans l'intervalle de ω à $\omega + d\omega$ [v. formule (4.13)].

En portant (4.65) dans (4.63), on obtient la formule de Planck sous la forme suivante :

$$\rho_\omega = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}, \quad (4.66)$$

qui coïncide exactement avec l'expression (4.19).

Contrôle thermique

Si l'on ne tient pas compte de l'émission stimulée, en posant dans (4.59) $B_{21} = 0$, la formule de Planck se transforme en formule de Wien

$$\rho_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \exp(-\hbar\omega/kT), \quad (4.67)$$

qui décrit bien le spectre du rayonnement thermique dans le domaine des fréquences élevées (fig. 4.2, courbe 2). A ces fréquences, la vitesse des transitions spontanées $A_{21} \propto \omega_{21}^3$ est si grande que l'équilibre entre l'absorption et l'émission s'établit pratiquement sans participation des transitions stimulées dont la vitesse est indépendante de ω . L'émission stimulée joue le rôle principal dans le domaine « ondes longues » du spectre pour lequel les transitions spontanées peuvent être négligées. La connaissance des lois qui gouvernent l'émission stimulée est importante pour le calcul des conditions d'auto-accrochage des masers et lasers. L'émission spontanée détermine la valeur des bruits internes dans ces appareils.